МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ «ДИНАМИКИ»

MODELING AN “DYNAMICS”

А.В. Пилюгин

A.V. Pilyugin

a.v.pilyugin@urfu.ru
Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»
г. Каменск-Уральский

В статье описывается использование специализированных математических пакетов для решения отдельных задач раздела «Динамика» из курса «Теоретическая механика» и визуального представления полученных результатов.

The article describes the use of specialized mathematical packages for specific tasks under “Dynamics” of course “Theoretical Mechanics” and a visual representation of the results.

Фундаментальную роль в качественной подготовке студентов технических специальностей играет курс теоретической механики. Раздел «Динамика» является неотъемлемой частью данного курса. При рассмотрении задач, связанных с динамикой колебательного движения, возникают значительные трудности, обусловленные тем, что для понимания и усвоения материала студентами помимо знания собственно предмета «Теоретическая механика» требуется основательная математическая подготовка, которой по ряду объективных и субъективных причин значительная часть обучающихся не обладает.

Математическая модель колебательного движения представляет собой дифференциальные уравнения как минимум второго порядка. В классическом учебнике «Курс теоретической механики, часть II» А.А. Яблонского подробному решению получившегося дифференциального уравнения и интерпретации полученных результатов посвящена целая глава, состоящая из нескольких десятков страниц. В современных условиях с учетом постоянного сокращения аудиторных часов преподаватель оказывается в затруднительной ситуации: с одной стороны, сложный материал, на изложение которого требуется много времени, и слабая математическая подготовка у студентов, с другой – крайне не хотелось бы идти по пути автора учебника «Основы теоретической механики» В.Я. Молотникова, полностью отказавшегося от изложения данного материала.

В статье хотелось бы предложить способ, каким образом математически строго и в то же время наглядно и быстро преподнести материал студентам.

Для этого мы воспользуемся замечательным пакетом математического моделирования «Mathcad». Эта программа позволяет не только записать исходное дифференциальное уравнение в привычной математической нотации, но и путем включения специальных конструкций сразу же решить его (естественно, только численно), что не будет являться для нас существенной проблемой, так как мы будем интерпретировать полученные решения путем построения графика, который среда «Mathcad» нам с легкостью и построит.

Для демонстрации возможностей программы рассмотрим дифференциальное уравнение вида $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+k^2x(t)=0$, которое может получиться при решении задачи нахождения траектории движения материальной точки массой m под действием восстанавливающей силы (например, сила сжатия и растяжения пружины) с коэффициентом пропорциональности c, где $k=\sqrt{c/m}$.

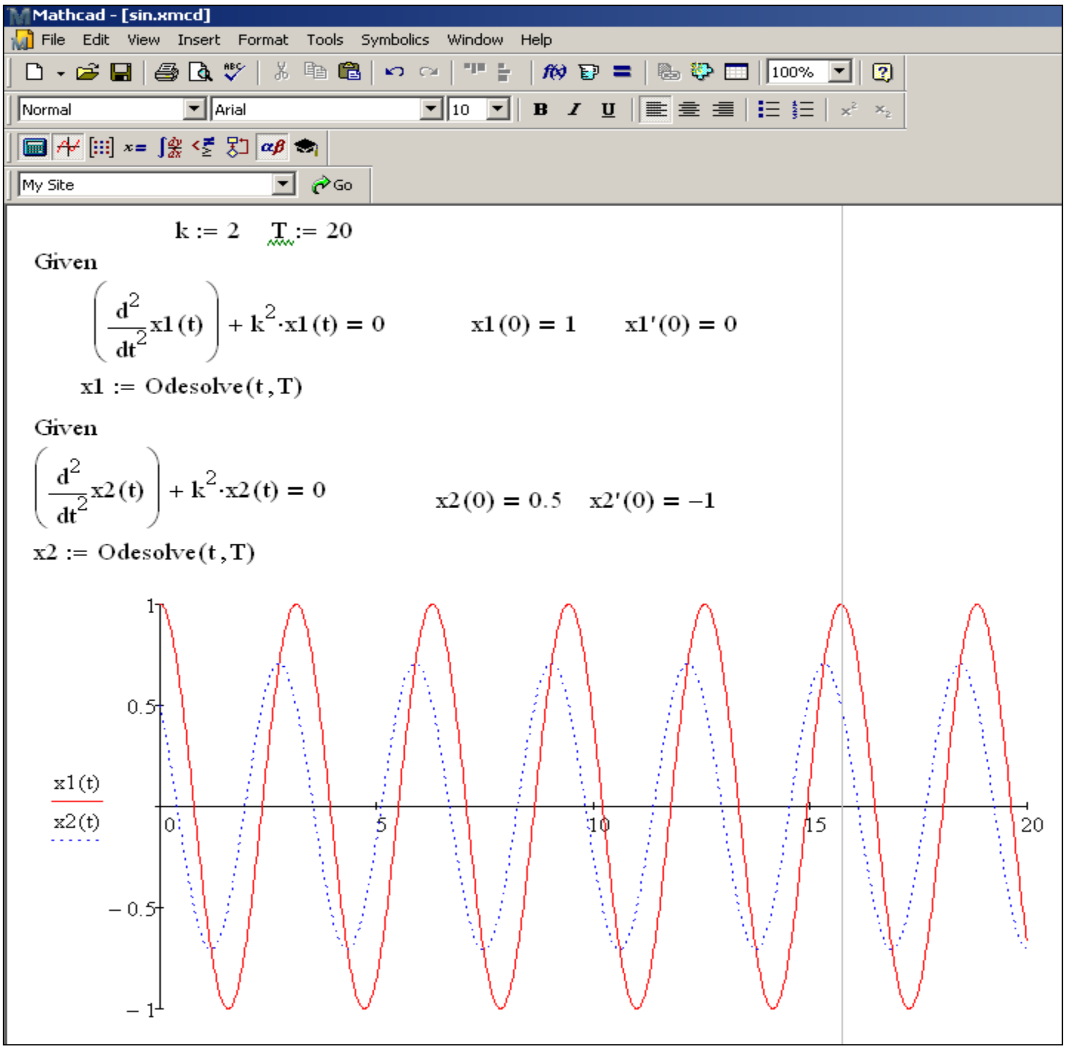

Рис. 1. Решение одного и того же уравнения
на промежутке от 0 до 20 секунд с разными начальными условиями

На рис. 1, являющемся снимком экрана, представлено решение одного и того же уравнения на промежутке от 0 до 20 секунд с разными начальными условиями. Глядя на графики, легко можно убедиться, что частота и период свободных колебаний точки не зависят от начальных условий движения.

Можем рассмотреть более сложный случай свободных колебаний материальной точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления движению. Тогда получим уравнение $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2n\frac{dx(t)}{dt}+k^2x(t)=0$, где $2n=\frac{\alpha}{m}$, α – коэффициент пропорциональности, численно равный силе сопротивления среды при скорости движения точки, равной единице.

На графике с рис. 2 функция $x0(t)$, является решением дифференциального уравнения при n = 0,2 (случай $n < k$, влияние сопротивление среды меньше восстанавливающей силы), описывает затухающие колебания, причем можно заметить, что период затухающих колебаний больше периода свободных колебаний.

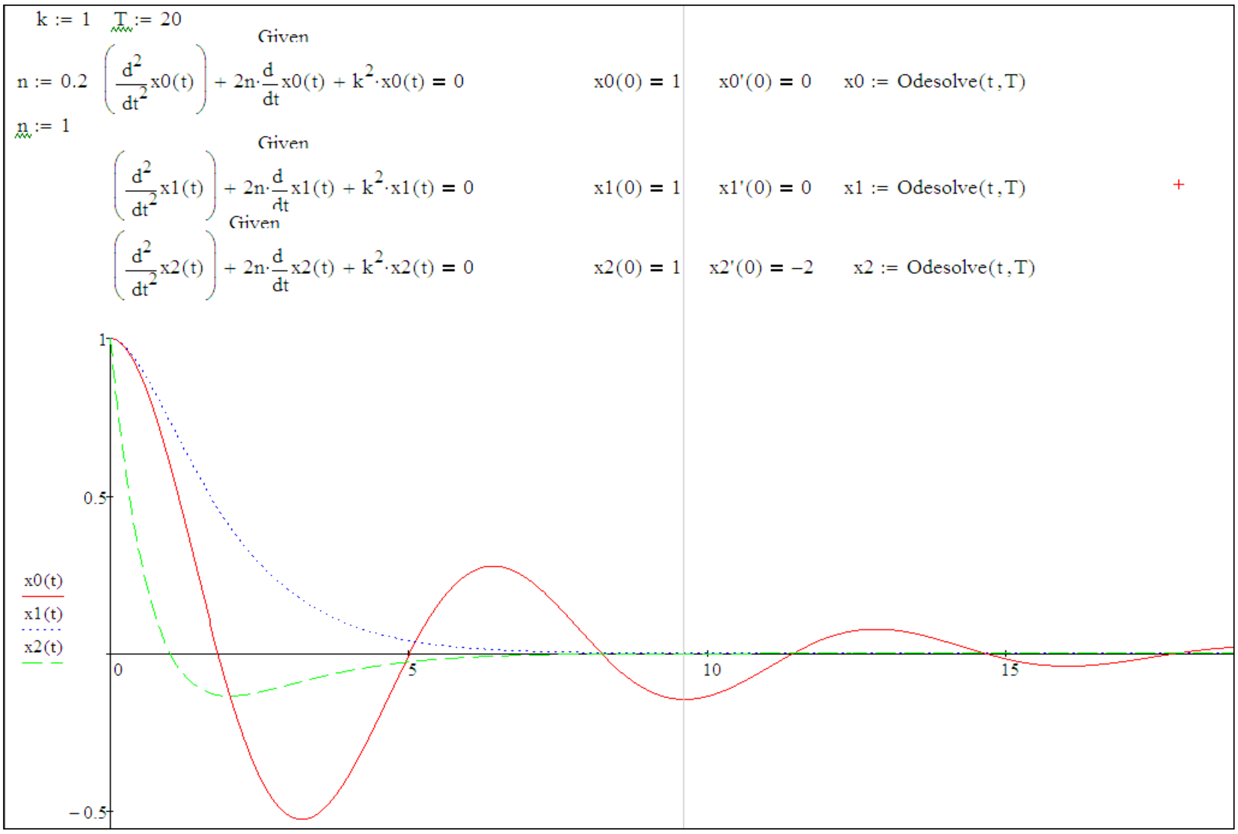

Рис. 2. Функция $x0(t)$, является решением дифференциального уравнения при n = 0,2

Функций $x1(t)$ и $x2(t)$ решения дифференциального уравнения при n = 1 (случай $n \geq k$, влияние сопротивление среды, больше восстанавливающей силы) и описывают движение материальной точки, которое теряет колебательный характер (становится апериодическим). Смотря на графики функций $x1(t)$ и $x2(t)$, можно отметить, что траектория движения материальной точки существенно зависит от начальных условий.

В заключение рассмотрим дифференциальное линейное (уже неоднородное) уравнение $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+k^2x(t)=f(x)$, которое описывает вынужденные колебания материальной точки под действием внешней периодической силы и все той же восстанавливающей силы.

На графике с рис. 3 функция $x0(t)$, является решением дифференциального уравнения в случае, когда частота внешней силы отличается от частоты собственных колебаний системы. Можно отметить, что устоявшиеся колебания происходят с частотой, совпадающей с частотой внешней силы. Если же частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний системы, мы наблюдаем явление резонанса («неограниченный» линейный рост амплитуды со временем) на графике функции $fr(t)$.

$k := 1 \quad T := 40 \quad f(t) := \sin(2k\cdot t)$

Given

$\left(\frac{d^2}{dt^2}x0(t)\right) + k^2\cdot x0(t) = f(t) \qquad x0(0) = 0 \quad x0'(0) = 0 \quad x0 := Odesolve(t, T)$

$f(t) := \sin(k\cdot t)$

Given

$\left(\frac{d^2}{dt^2}xr(t)\right) + k^2\cdot xr(t) = f(t) \qquad xr(0) = 0 \qquad xr'(0) = 0 \qquad xr := Odesolve(t, T)$

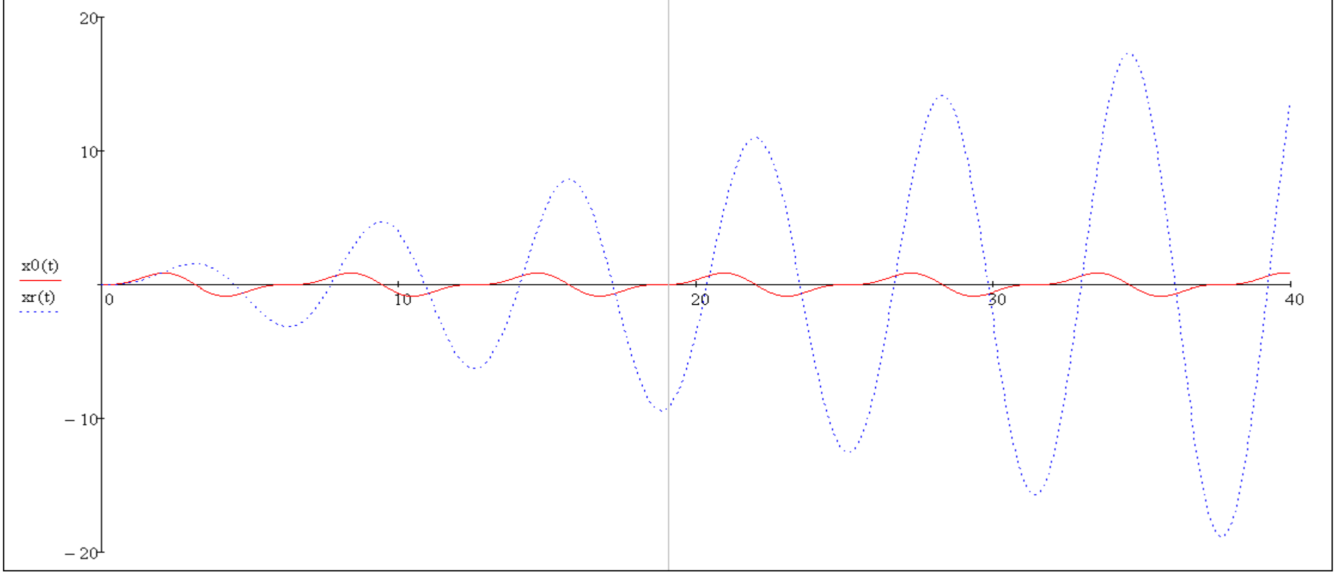

Рис. 3. Функция $x0(t)$, является решением дифференциального уравнения в случае, когда частота внешней силы отличается от частоты собственных колебаний системы

В данной статье мы рассмотрели пример использование современных информационных технологий для повышения качества подготовки студентов.